Лагранж теңдеуіне келтірген есепке қайта оралып, ол үшін $\varphi(p) = p^2$ болатынын және $p - p^2 = 0$ теңдеуі $p_1 = 0,\ p_2 = 1$ түбірлерін беретінін байқаймыз. Бірінші шешім $y = 0$ ерекше шешімге келтіретін болса, екіншісі $y = x + 1$ шешіміне келтіреді. Бұл дербес шешім, өйткені ол $y = \left(\sqrt{x+1} - C\right)^2$ жалпы шешімінен $C = 0$ болғанда алынады.

§15. Изогональ траекториялар жөніндегі есеп

Туындысына қатысты шешілмеген теңдеулерге көбінесе геометриялық есептер келтіреді. Ондай есепке, мәселен, изогональ траекториялар жөніндегі есепті жатқызуға болады. Егер бірпараметрлі қисықтар жиынтығы

$$F(x, y, a) = 0 \tag{4.84}$$

теңдеуімен берілсе (мұнда a – параметр), онда оның ***изогональ траекториялары*** деп (4.84) жиынтығының қисықтарын бірден-бір j бұрышымен қиятын екінші қисықтар жиынтығын айтады. Дербес жағдайда $j = p/2$ болса, онда траекториялар ***ортогоналды*** деп аталады.

Берілген (4.84) қисықтар жиынтығының дифференциалдық теңдеуін құрайық. Ол үшін (4.84) теңдеуін x бойынша дифференциалдаймыз:

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot y' = 0 \tag{4.85}$$

(4.84) және (4.85) теңдеулеріндегі a параметрінен құтылайық. Осының нәтижесінде (4.84) қисықтар жиынтығының дифференциалдық теңдеуі

$$y' = f(x, y) \tag{4.86}$$

түріне келеді деп ұйғарайық. Екі қисық арасындағы бұрыш деп олардың қиылысу нүктесіндегі сол қисықтарға жүргізілген жанамалар арасындағы бұрышты айтатынымыз белгілі (20-сурет). Егер a арқылы Ox осімен (4.84) қисықтар жиынтығына тиіс L_1

қисығының M нүктесіндегі жанамасы арасындағы бұрышын белгілеп, b арқылы Ox осімен (4.84) ізделінді жиынтыққа тиіс L_2 қисығының сол нүктедегі жанамасы арасындағы бұрышты белгілесек, онда $j = \pm (b - a)$ немесе $b = a \pm j$ болады. Бұдан

$$tg\beta = \frac{tg\alpha \pm tg\varphi}{1 \mp tg\alpha tg\varphi}.$$

$tg\varphi$ берілген шама, оны k арқылы белгілейік; ал $tg\alpha = y' = f(x, y)$; сондықтан

$$tg\beta = \frac{f(x, y) \pm k}{1 \mp kf(x, y)}$$

Осымен изогональ траекторияға тиіс кез келген нүкте координаталарын сол нүктедегі жанаманың бұрыштық коэффициентімен байланыстыратын қатынасты, атап айтқанда, траекториялар жиынтығының дифференциалдық теңдеуін шығарып отырмыз. $tg\beta$-ны y' арқылы белгілейік, сонда

$$y' = \frac{f(x, y) \pm k}{1 \mp kf(x, y)} \qquad (4.87)$$

Осы дифференциалдық теңдеудің жалпы интегралы (4.84) жиынтығы қисықтары үшін анықталған изогональ траекторияларының теңдеуі болып табылады; олар (4.84) қисықтарын бірден-бір j бұрыш жасап қияды. Егер траекториялар ортогональ болса, онда

$$j = p/2\,,\ b = a \pm p/2,\ tg\beta = -ctg\alpha = -\frac{1}{tg\alpha} = -\frac{1}{f(x, y)}$$

және ортогональ траекториялар жиынтығының дифференциалдық теңдеуі

$$y' = -\frac{1}{f(x, y)} \ \textit{немесе} \ -\frac{1}{y'} = f(x, y) \qquad (4.88)$$

Осыдан туындайтын ереже: (4.84) қисықтар жиынтығы үшін анықталатын изогональ траекториялары жиынтығының дифференциалдық теңдеуін табу үшін, осы жиынтықтың (4.86) дифференциалдық теңдеуінде y'-ті $\dfrac{y' \mp k}{1 \pm ky'}$ шамасына алмастыру керек, мұндағы k - қисықтар және оларды қиятын траекториялар арасындағы бұрыш тангенсі. Дербес жағдайда, ортогональ траекториялар үшін y'-ті $-\dfrac{1}{y'}$ шамасына алмастыру керек.

§16. Жоғары ретті теңдеулер

Дәрежесі бірден жоғары барлық дифференциалдық теңдеулерді ***жоғары ретті дифференциалдық теңдеулер*** дейді. n-ретті теңдеу міндетті түрде енген $y^{(n)}$ туындысымен бірге төменгі ретті туындыларды қамтуы мүмкін, демек мұндай теңдеудің жалпы түрі

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0, \tag{4.89}$$

немесе мүмкіндігінше жоғары туындысына қатысты шешілгендегі түрі.

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \ldots, yy^{(n-1)}). \tag{4.90}$$

Бірінші ретті теңдеудегідей, жалпы шешім еркін тұрақтыларға тәуелді болады. Сондықтан жалпы шешімнен дербес шешімді бөліп алу үшін, дифференциалдық теңдеумен бірге, еркін тұрақтыларды анықтауға мүмкіндік беретін қосымша шарттар берілуі қажет. Бірінші ретті дифференциалдық теңдеу үшін мұндай қосымша шарт $y\big|_{x=x_0} = y_0$ мәнінің берілуі, атап айтқанда интегралдық сызық өтетін нүкте координаталарының берілуі болып табылады. Жоғары ретті теңдеулер үшін мұндай шарттарды түрлі тәсілдермен беруге болады. Мәселен, екінші ретті теңдеу үшін жалпы шешім екі еркін тұрақтыға тәуелді. Оларды табу үшін екі шарт берілгені жеткілікті. Олар ізделінді функция мәндерін екі нүктеде беру арқылы немесе бір нүктеде есептелген функция және оның туындысының мәндері арқылы табылады.

Екінші тәсіл механиканың есептері келтіретін дифференциалдық теңдеулерді шешуде кең тараған. Расында, егер механика ұғымдарын пайдаланса, нүктенің бастапқы орны (функция мәні) және оның бастапқы жылдамдығы (бірінші ретті туынды) берілуінде қозғалу заңын анықтау жөнінде сөз етіледі. Сондықтан функция және оның бірінші туындысының кейбір нүктесіндегі мәндері бойынша, жалпы шешімнен дербес шешімді бөліп алу есебін ***бастапқы шарттары бар*** есеп дейді.

n-ретті теңдеу үшін бастапқы шарттар ретінде кейбір нүктеде функцияның және оның бірінші ретті туындысынан бастап (n - 1)-ші туындысын қоса есептегендегі барлық туындыларының мәндері, атап айтқанда, $x=x_0$ болғанда

$$y = y_0,$$

$$y' = y_0', \tag{4.91}$$

$$y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)}$$

мәндері беріледі. (4.91) сандар жүйесін ***бастапқы шарттар жүйесі*** дейді. (4.91) бастапқы шарттарын қанағаттандыратын берілген (4.90) дифференциалдық теңдеуінің дербес шешімін табу есебін ***Коши есебі*** дейді. Шешімнің бар болуы және жалғыздығы жөніндегі теореманы бірінші болып Коши дәлелдеп, төмендегідей тұжырымдама жасады.

Теорема 4.1. (4.90) дифференциалдық теңдеуі мен (4.91) ***бастапқы шарттар*** жүйесі берілсін. Егер $f(x, y, y', y'',..., y^{(n-1)})$ функциясы ***бастапқы шарттар*** маңайында үзіліссіз болып, $y, y', y'',..., y^{(n-1)}$ аргументтері бойынша үзіліссіз дербес туындыларға ие болса, онда, x_0-ді қамтитын кейбір интервалда анықталған әрі үзіліссіз және берілген бастапқы шарттар жүйесін қанағаттандыратын шешім жалғыз болады.

4.1-анықтама. (4.89) дифференциалдық теңдеудің ***жалпы шешімі*** деп осы теңдеу ретіне тең саны бар c_1, c_2, …, c_n тұрақтыларын қамтитын және төмендегідей шарттарды қанағаттандыратын $y = \varphi(x, c_1, c_2, c_3, ..., c_n)$ функциясын айтады. Ол шарттар:

1. $y = \varphi(x, c_1, c_2, c_3, ..., c_n)$ функциясы $c_1, c_2, c_3, ..., c_n$ тұрақтыларының кез келген мәнінде (4.89) дифференциалдық теңдеуінің шешімі болады;

2. Дифференциалдық теңдеудің шешімін болдыратын *кез келген* $x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}$ *бастапқы мәндері үшін* $\varphi\left(x_0, \tilde{c}_1, \tilde{c}_2, \ldots, \tilde{c}_n\right) = y_0$,

$\varphi'\left(x_0, \tilde{c}_1, \tilde{c}_2, \ldots, \tilde{c}_n\right) = y_0'$, $\varphi''\left(x_0, \tilde{c}_1, \tilde{c}_2, \ldots, \tilde{c}_n\right) = y_0''$, … ,

$\varphi^{(n-1)}\left(x_0, \tilde{c}_1, \tilde{c}_2, \ldots, \tilde{c}_n\right) = y_0^{(n-1)}$ *бастапқы шарттары орындалатын-*

дай $c_1 = \tilde{c}_1$, $c_2 = \tilde{c}_2$, $c_3 = \tilde{c}_3, \ldots, c_n = \tilde{c}_n$ тұрақтылары табылады.

Айқындалмаған түрде берілген теңдеу шешімін оның ***жалпы интегралы*** дейді. Егер (4.89) дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін кескіндейтін $y = \varphi\left(x, c_1, c_2, c_3, \ldots, c_n\right)$ функциясындағы $c_1, c_2, c_3, \ldots, c_n$ тұрақтыларының орнына сандық мәндер қоятын болсақ, ондай (4.89) теңдеуінің шешімдерін теңдеудің ***дербес шешімдері*** деп айтады.

Жоғары ретті дифференциалдық теңдеулерді интегралдау есебі бірінші ретті дифференциалдық теңдеуді интегралдау есебіне қарағанда анағұрлым күрделі және көптеген жағдайда ондай теңдеуге келтіріле бермейді. Сонда да 13 - 19 параграфтар аралығында қарастырылатын сызықтық теңдеулерді есепке алмағанда, жоғары ретті теңдеулердің өзге түрлерін интегралдаудың негізгі әдісі болып ***теңдеу ретін төмендету*** әдісі, атап айтқанда, айнымалыларды ауыстыру арқасында берілген теңдеуді реті төмен теңдеуге келтіру әдісі табылады. Теңдеу ретін төмендету тіпті ақырлы түрде интегралданбайтын бірінші ретті теңдеуге келтіретін жағдайда немесе реті бірден жоғары теңдеуге келтіретін жағдайда да тиімді. Алайда теңдеу ретін төмендету қашан да жүзеге аса бермейді. Төменде ретін төмендетуді мүмкін ететін кейбір теңдеу түрлері қарастырылады.

§17. Ретін төмендетуді мүмкін ететін теңдеу түрлері

17.1. n-ретті $y^{(n)} = f(x)$ дифференциалдық теңдеу ретін төмендету

Ретін төмендетуді мүмкін ететін n-ретті теңдеудің қарапайым түрі

$$y^{(n)} = f(x). \qquad (4.92)$$

Мұнда теңдеу реті тікелей тізбекті интегралдау арқылы төмендейді. (4.92) өрнектен бастапқыда

$$y^{(n-1)} = \int f(x)dx + C_1$$

болатыны шығады. Осылайша, қажетіне қарай бірнеше рет интегралдау нәтижесінде (4.92) теңдеуінің жалпы шешімін табамыз, оның өзінде еркін тұрақтылар (n - 1) дәрежелі көпмүше коэффициенттері ретінде шешімге енеді.

Мысал. $y''' = \sin x - \cos x$ теңдеуін шешу талап етілсін.

Шешімі. Теңдеудің екі жағын 3 мәрте интегралдағаннан, тізбекті түрде

$$y'' = -\cos x - \sin x + 2C_1,$$
$$y' = -\sin x + \cos x + 2C_1 x + C_2,$$
$$y = \cos x + \sin x + C_1 x^2 + C_2 x + C_3$$

болатынын шығарып аламыз. Мұндай теңдеулердің түрінің қарапайымдылығына қарамастан маңызы зор, өйткені оған өзге түрдегі теңдеулер келтіріледі, екінші жағынан осы түрге бірқатар «Материалдар кедергісі» пәнінің есептерін шешкенде пайда болатын кейбір теңдеулер жатады. Мұндай есептерді кейінге қалдырып, әзірше ретін төмендетуді мүмкін ететін теңдеудің өзгеше бір түрін қарастырайық.

17.2. $F\left(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \dots, y^{(n)}\right) = 0$ *дифференциалдық теңдеуінің ретін төмендету*

Ізделінді функцияны және оның тізбекті түрде алынған y', y'', ..., $y^{(k-1)}$ *ретті туындыларын қамтымайтын*

$$F\left(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \dots, y^{(n)}\right) = 0 \qquad (4.93)$$

дифференциалдық теңдеуі оның ретін k бірлікке төмендетуді мүмкін етеді. Расында, жаңа ізделінді функция ретінде

$$u = y^{(k)} \qquad (4.94)$$

функциясын алайық. (4.94)-ті дифференциалдау $u' = y^{(k+1)}, \dots$,

$u^{(n-k)} = y^{(n)}$ өрнектерін береді. Табылған туындыларды (4.93)-ке енгізгеннен кейін, оны

$$F(x, u, u', u'', \ldots, u^{(n-k)}) = 0$$

түріне, атап айтқанда, ($n - k$) ретті теңдеуге келтіреміз. Осы теңдеуді интегралдау нәтижесінде жаңа u функциясын анықтай аламыз. Сонда (4.94) теңдігін, белгілі u функциясын қамтитын жаңа дифференциалдық теңдеу, атап айтқанда, k ретті

$$y^{(k)} = f(x, c_1, c_2, c_3, \ldots c_{n-k}) \tag{4.95}$$

теңдеуі ретінде қарастырамыз. Мұндай түрдегі теңдеу жоғарыда қарастырылған және ол тікелей интегралданады.

Мысал. $y^{IV} = \sqrt{y'''}$ теңдеуінің жалпы шешімін табу талап етіледі.

Шешімі. Бұл теңдеу ізделінді функцияны және оның алғашқы екі туындысын қамтымайды. Сондықтан теңдеу ретін үш бірлікке төмендетуге болады. $y''' = u$ деп ұйғарып, оны дифференциалдағаннан $y^{IV} = u'$ немесе бірінші ретті $u' = \sqrt{u}$

теңдеуіне келеміз. Айнымалыларды айырған соң $\dfrac{du}{\sqrt{u}} = dx$ теңдеуінен $2\sqrt{u} = x + C_1;\ u = \dfrac{1}{4}\left(x + C_1\right)^2$ және $u = 0$ болатынын шығарып аламыз. Демек $y''' = \dfrac{1}{4}\left(x + C_1\right)^2$ және $y''' = 0$

теңдеулеріне келеміз. Осы теңдеулерді үш қайтара интегралдап, тізбекті түрде

$$y'' = \frac{1}{12}\left(x + C_1\right)^3 + 2C_2,$$

$$y' = \frac{1}{48}\left(x + C_1\right)^4 + 2C_2 x + C_3,$$

$$y = \frac{1}{240}\left(x + C_1\right)^5 + C_2 x^2 + C_3 x + C_4$$

және

$$y = C_1^* x^2 + C_2^* x + C_3^*$$

жалпы шешімдерін шығарып аламыз.

17.3. F(x, y′, y″) = 0 түріндегі теңдеу ретін төмендету

Осының алдында қарастырылған теңдеудің дербес жағдайына ізделінді функциясы айқын түрде кірмейтін екінші ретті

$$F(x, y', y'') = 0, \tag{4.96}$$

теңдеуін жатқызуға болады. Мұнда $y' = u$ ауыстырмасы арқылы теңдеу реті бір бірлікке кемиді.

Мысал. $y'' + \dfrac{y'}{x} = x$ теңдеуін интегралдау талап етіледі.

Шешімі. $y' = u$ деп ұйғарсақ, онда $y'' = u' = x$ және теңдеу

$$u' + \frac{u}{x} = x$$

түріне ауысады. Бұл - бірінші ретті сызықтық теңдеу. Оны интегралдау нәтижесінде $u = \dfrac{x^2}{3} + \dfrac{C_1}{x}$ демек $y' = \dfrac{x^2}{3} + \dfrac{C_1}{x}$

теңдеуіне ауысамыз. Одан жалпы шешім $y = \dfrac{x^3}{9} + C_1 \ln|x| + C_2$ түрінде алынады.

17.4. Дифференциалдық теңдеудің аралық интегралы арқылы теңдеу ретін төмендету

Ізделінді функцияның реті n-нен төмен туындыларын, ізделінді функцияның өзін, тәуелсіз айнымалы мен саны n-нен кем болатын еркін тұрақтыларды байланыстыратын (4.95) түріндегі өрнекті (4.93) ***дифференциалдық теңдеуінің аралық интегралы*** дейді. Қарастырылған мысалдарда дифференциалдық теңдеулердің жалпы шешімдерін тапқан болатынбыз. Дербес шешімді іздестіргенде, жоғарыда көрсетілгендей, табылған жалпы шешімді пайдалануға болар еді, алайда еркін тұрақтылардың мәндерін, берілген бастапқы шарттарды келесі интегралдауға дейін пайдаланып, аралық интегралдың өзінен тапқан әлдеқайда жеңілдеу.

Мысал. $x = 0,\ y = 1,\ y' = 3$ бастапқы шарттарында $y''\left(x^2+1\right) = 2xy'$ теңдеуін шешу талап етіледі.

Шешімі. $y' = u$ ауыстырмасын қолданып, $y'' = u'$ аламыз, ал одан бірінші ретті

$$u'\left(x^2+1\right) = 2xu$$

теңдеуін шығарып аламыз. Айнымалыларды айырып, интегралдау нәтижесінде

$$\frac{du}{u} = \frac{2xdx}{x^2+1};\ \ln u = \ln\left(x^2+1\right) + \ln C_1;\ \ u = C_1\left(x^2+1\right).$$

Бұдан

$$y' = C_1\left(x^2+1\right).$$

Бұл қатынас бастапқы теңдеудің аралық интегралын кескіндейді. Бастапқы шарттарды пайдаланып, $3 = C_1\left(0+1\right) \Rightarrow C_1 = 3$ мәнін табамыз. Демек $y' = 3\left(x^2+1\right)$, ал оны интегралдап, $y = x^3 + 3x + C_2$ шешіміне келеміз. Бастапқы шарттар $1 = 0 + 0 + C_2$, атап айтқанда $C_2 = 1$ мәнін береді, сондықтан берілген бастапқы шарттар жүйесін қанағаттандыратын дербес шешім

$$y = x^3 + 3x + 1$$

түріне келеді.

17.5. F(y, y', y'',…, y⁽ⁿ⁾) = 0 түріндегі теңдеу ретін төмендету

Ретін төмендетуді мүмкін ететін тағы бір теңдеу нұсқасы, ***тәуелсіз айнымалыны қамтымайтын***

$$F(y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0, \tag{4.97}$$

теңдеуі түрінде кескінделеді. Мұнда айнымалының екеуін де ауыстырған күнде теңдеу реті бірге кемиді. Жаңа ізделінді функция ретінде $y' = p$-ны, ал жаңа тәуелсіз айнымалы ретінде y-ті аламыз. Күрделі функцияны дифференциалдау ережесі бойынша

$$y'' = \frac{d}{dx}p = \frac{dp}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} = p\frac{dp}{dy},$$

$$y''' = \frac{d}{dx}\left(p\frac{dp}{dy}\right) = p\frac{d}{dx}\left(\frac{dp}{dy}\right) + \frac{d}{dx}p\frac{dp}{dy} = p^2\frac{d^2p}{dy^2} + p\left(\frac{dp}{dy}\right)^2.$$

толық индукция әдісі бойынша $y^{(n)}$ туындысы $p, \frac{dp}{dy}, \frac{d^2p}{dy^2}, \ldots, \frac{d^{n-1}p}{dy^{n-1}}$

арқылы өрнектелетінін дәлелдеуге болады. Осы ауыстырма арқасында (4.97) теңдеуі

$$F_1 = \left(y, p, \frac{dp}{dy}, \frac{d^2p}{dy^2}, \ldots, \frac{d^{n-1}p}{dy^{n-1}}\right) = 0 \qquad (4.98)$$

атап айтқанда, (n - 1)-ретті теңдеуге ауысады.

Мысал. $(y')^2 - yy'' = 1$ теңдеуін интегралдау талап етіледі.

Шешімі. $y' = p$ және y жаңа айнымалы болсын. Жоғарыда айтылғандай, $y'' = p\frac{dp}{dy}$ болып, жаңа айнымалыдағы теңдеу

$p^2 - yp\frac{dp}{dy} = 1 \Rightarrow yp\frac{dp}{dy} = p^2 - 1$ болады, яғни айнымалылары

айырылған бірінші ретті теңдеу. Бұдан тізбекті түрде

$$\frac{pdp}{p^2-1} = \frac{dy}{y} \Rightarrow \frac{1}{2}\ln\left(p^2-1\right) = \ln y + \frac{1}{2}\ln C_1 \Rightarrow p^2 - 1 = C_1y^2 \Rightarrow p = \sqrt{1+C_1y^2}$$

болатыны шығады, мұнда нақтылық үшін түбір алдында мүмкін болатын таңбалардың бірі алынған, және ($p^2 - 1$-ге бөлу салдарынан) $p=\pm 1$ деп алынған. p-ның орнына y' өрнегін енгізіп,

$$\frac{dy}{dx}=\sqrt{1+C_1y^2}\Rightarrow\frac{dy}{\sqrt{1+C_1y^2}}=dx\Rightarrow x+C_2=\int\frac{dy}{\sqrt{1+C_1y^2}}$$

болатынын, сол сияқты $y'=\pm 1$-ден $y=\pm x+C^*$ болатынын шығарып аламыз. Интеграл нұсқасы C_1 тұрақтысының таңбасына, атап айтқанда бастапқы шарттарға тәуелді. Мұнда жалпы шешімді табу талап етілетіндіктен және бастапқы шарттардың болмауына байланысты жағдайдың екеуін де қарастыру қажет. Егер $C_1>0$ болса, онда

$$\int\frac{dy}{\sqrt{1+C_1y^2}}=\frac{1}{\sqrt{C_1}}\ln\left(y\sqrt{C_1}+\sqrt{1+C_1y^2}\right)$$

болып, теңдеудің жалпы шешімі

$$\frac{1}{\sqrt{C_1}}\ln\left(y\sqrt{C_1}+\sqrt{1+C_1y^2}\right)=x+C_2$$

түріне келеді. Егер керісінше $C_1<0$ болса, онда теңдеудің жалпы шешімі

$$x+C_2=\frac{1}{\sqrt{-C_1}}\arcsin y\sqrt{-C_1}$$

түрінде жазылады.

17.6. Сол жағы дәл туынды болып келетін теңдеу ретін төмендету

Теңдеу ретін төмендетуді мүмкін ететін тағы бір жағдайды атап өтейік. Бұл - ***теңдеудің сол жағы дәл туынды болып келетін жағдай***. Мұндайда теңдеу реті тікелей интегралдау нәтижесінде бірге кемитіні түсінікті. Бұл өте сирек кездесетін жағдай. Көптеген жағдайда аталған теңдеу түріне кейбір жасанды түрлендірулер көмегімен қол жеткізуге болады және мұндай түрлендірулердің кең тараған әдістері жоқ. Мұнда мысалдармен шектелеміз.

Мысал. $y'' - xy' - y = 0$ теңдеуін шешу талап етіледі.

Шешімі. Теңдеуді

$$\left(y' - xy\right)' = 0$$

түріне келтіруге болады, демек оның сол жағы дәл туынды. Бұдан

$$y' - xy = C_1,$$

аралық интеграл бірінші ретті сызықтық теңдеуді кескіндейді. Оны интегралдау нәтижесінде $y = C_1 e^{x^2/2}\left(\int e^{-x^2/2}dx + C_2\right)$ интегралына қол жеткіземіз. Ол элементар функцияларда өрнектелмегенімен, мұндай элементар емес функция үшін дәйекті кестелер құрылған. Интеграл сол кестелер бойынша есептеледі.

Мысал. $yy'' - \left(y'\right)^2 - y^2 = 0$ теңдеуінің жалпы шешімін табу талап етіледі.

Шешімі. Осы теңдеудің сол жағы дәл туынды болмайды. Бірақ бұл теңдеуді $yy'' - \left(y'\right)^2 = y^2$ немесе $\dfrac{yy'' - \left(y'\right)^2}{y^2} = 1$ түрінде көшіріп жазуға болады. Бұдан теңдеу $\left(\dfrac{y'}{y}\right)' = 1$ түріне келетіні көрінеді. Интегралдау нәтижесінде $\dfrac{y'}{y} = x + C_1$ немесе айнымалылары айырылатын $y' = y\left(x + C_1\right)$ теңдеуіне келеміз. Айнымалыларды айырып, интегралдайық:

$$\frac{dy}{y} = \left(x + C_1\right)dx \Rightarrow \ln y = \frac{\left(x + C_1\right)^2}{2} + \ln C_2$$

атап айтқанда

$$y = C_2 e^{\left(x + C_1\right)^2/2}.$$